Leçon 233 : Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

Développements :

Algorithme du gradient à pas optimal, Méthode de relaxation.

Bibliographie :

Allaire Kaber, Ciarlet, Rombaldi Algèbre, Filbet, Bernis

Rapport du jury :

Dans cette leçon de synthèse, les notions de norme matricielle et de rayon spectral sont centrales, en lien avec le conditionnement et avec la convergence des méthodes itératives; elles doivent être développées. Le résultat général de convergence, relié au théorème du point fixe de Banach, doit être enrichi de considérations sur la vitesse de convergence. Le jury invite les candidats à étudier diverses méthodes issues de contextes variés : résolution de systèmes linéaires, optimisation de fonctionnelles quadratiques, recherche de valeurs propres,. . . Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de type Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires, les méthodes de gradient dans le cadre quadratique, les méthodes de puissance pour la recherche de valeurs propres. Les candidats pourront également envisager les schémas numériques pour les équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires.

Remarque 1. *Cadre : Soit $K = R$ ou C.*

1 Introduction aux outils des méthodes itératives.

1.1 Normes matricielles

Définition 2 (Allaire Kaber p52). *[Ciarlet p14] Norme matricielle sous-multiplicative.*

Exemple 3 (Allaire K p52). *Norme de Frobenius.*

Contre exemple 4 (Allaire K p52). *Le max des coefficients.*

Définition 5 (Allaire K p52). *Norme subordonnée.*

Proposition 6 (Allaire K p53). *Autres définitions de la norme subordonnée (norme sur 1 ,..) ?*

Proposition 7 (Allaire K p53). *[Ciarlet p16] Il existe $x \neq 0$ tel que $||A|| = ||Ax||/||x||$ et $||Ax|| \leq ||A||||x||$.*

Proposition 8 (Allaire K p53). $||I_n|| = 1$.

Proposition 9 (Allaire K p53). *Une norme subordonnée est matricielle.*

Contre exemple 10 (Allaire K p54). *Il existe des normes matricielles qui ne sont subordonnées à aucune norme : Norme de Frobenius.*

Exemple 11 (Allaire K p54). *[Ciarlet p16] Norme 1,∞,2.*

1.2 Rayon spectral

Définition 12 (Allaire K p31). *[Romb] Rayon spectral.*

Remarque 13 (Allaire K p52). *Le rayon spectral n'est pas une norme. (sauf sur l'ensemble des matrices normales).*

Proposition 14 (Ciarlet p17). *Lorsque A est normale, $||A||_2 = \rho(A)$.*

Proposition 15. *Expression de la norme 2.*

Proposition 16 (Allaire K p57). *[Romb p646, attention à "norme matricielle induite par une norme") Pour toute norme matricielle, $\rho(A) \leq ||A||$. Réciproquement, étant donnée une matrice A, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que $||A|| \leq \rho(A) + \epsilon$. Autrement dit $\rho(A) = inf\{||A||; ||.||\}$.*

Remarque 17 (Allaire K p58). *[Romb p646] Faux si norme non matricielle.*

Proposition 18 (Allaire K p58). *[Ciarlet p21][Romb p647] $\lim A^k = 0$ si et seulement si $\rho(A) < 1$ si et seulement si il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que $||A|| < 1$.*

Corollaire 19 (Romb p650). *[Allaire K p58][Ciarlet p22] $\rho(A) = \lim ||A^k||^{1/k}$.*

1.3 Conditionnement

Remarque 20 (Filbet p8). *On constate que, pour deux vecteurs $b, b' \in K^n$ ("proches"), les solutions du système $Ax = b$peuvent être très différentes.*

Pour la résolution de $Ax = b$ pour A la matrice de Hilbert, une petite perturbation de la donnée b conduit à une grande modification de la solution x, ce qui engendre des instabilités lors de la résolution du système. Le conditionnement permet de "quantifier" cette instabilité.

Définition 21 (Allaire K p89). *Conditionnement.*

Proposition 22 (Allaire K p90). *Inégalité de conditionnement lorsque l'on perturbe la donnée b.*

Proposition 23 (Allaire K p90). *Inégalité de conditionnement lorsque l'on perturbe la donnée A.*

Remarque 24 (Allaire K p90). *Ces inégalités sont optimales.*

Proposition 25 (Allaire K p90). *[Ciarlet p31] $Cond(A) \geq 1$, $cond(A) = cond(A^{-1}$, $cond(A) = cond(\alpha A)$.*

Proposition 26 (Allaire K p91). *Calcul du conditionnement pour la norme 2, puis lorsque A est normale et lorsque A est unitaire ou orthogonale, le conditionnement en norme 2 vaut 1.*

Définition 27 (Allaire K p91). *Un système est bien conditionné si $cond(A)$ n'est pas trop grand par rapport à 1 (sa valeur minimale), ce qui correspond au conditionnement de l'identité. Sinon, il est dit mal conditionné.*

Remarque 28 (Allaire K p91). *Les matrices unitaire et orthogonales sont (très) bien conditionnées, ce qui explique l'intérêt d'avoir à manipuler à chaque fois que c'est possible ces matrices plutôt que d'autres.*

Remarque 29 (Allaire K p91). *Le conditionnement en norme 2 d'une matrice mesure l'aplatissement de l'ellipsoïde. Une matrice est d'autant mieux conditionnée que l'ellipsoïde est proche de la sphère.*

1.4 Théorème de point fixe

Proposition 30. *Théorème de point fixe de Picard avec vitesse.*

Contre exemple 31.

2 Résolutions itératives de systèmes linéaires

Remarque 32. *Il ne s'agit pas de résoudre exactement un système linéaire (car ça peut être fastidieux en grande taille, et de toute façon, les calculs sur l'ordinateur ne fournissent qu'une solution approchée à cause des erreurs d'arrondis et il peut y avoir des problèmes d'instabilité.)*

2.1 Méthodes de décomposition

Définition 33 (Allaire K p155). *[Filbet p35] Décomposition régulière. On écrit $A = M - N$ avec M inversible (et surtout facile à inverser ! par exemple diagonale, triangulaire, orthogonale...).*

Définition 34 (Allaire K p155). *Une méthode itérative basée sur la décomposition régulière est définie par ..*

Remarque 35 (Allaire K p155). *On remplace la résolution d'un seul système $Ax = b$ en une suite de plusieurs systèmes $My = c$. Il faut donc que M soit beaucoup plus facile à inverser.*

Remarque 36 (Allaire K p155). *Résoudre le système est équivalent à résoudre $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$.*

Proposition 37 (Allaire K p155). *Si la suite (x_n) converge, c'est nécessairement vers un point fixe de l'application $x \mapsto M^{-1}Nx + M^{-1}b$ par continuité de cette dernière. Or cette application ne possède qu'un point fixe, qui n'est autre que l'unique solution du système.*

Définition 38 (Allaire K p156). *Méthode convergente.*

Définition 39 (Allaire K p156). *Erreur et résidu.*

Proposition 40 (Allaire K p156). *La méthode converge si et seulement si $e_k \to 0$ soit encore si et seulement si $r_k \to 0$.*

Remarque 41 (Allaire K p156). *En général, on ne connaît pas e_k, en revanche, le calcul de r_k est facile.*

Proposition 42 (Allaire K p156). *La méthode converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.*

Proposition 43 (Allaire K p168). *[Filbet p39] Test d'arrêt avec le résidu $r_k = b - Ax_k$.*

Proposition 44. *Critère de convergence : si $M^* + N$ est définie positive.*

Exemple 45 (Allaire K). *[Romb analyse matricielle] On note D la partie diagonale de A, E sa partie triangulaire inférieure, F sa partie triangulaire supérieure.*

La méthode de Jacobi est associée à la décomposition $M = D, N = E + F$.

La méthode de Gauss-Seidel est associée à la décomposition$M = D-E, N = F$.

La méthode de relaxation est associée ...

Proposition 46 (Romb analyse matricielle). *Si A est à diagonale strictement dominante, Jacobi et Gauss Siedel convergent.*

Proposition 47 (Romb). *Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, la méthode de Gauss Siedel converge.*

Proposition 48. *Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, la méthode de relaxation converge si et seulement si $w \in]0, 2[$.*

Application 49 (Allaire K p164). *La résolution de problèmes linéaires associés à la matrice du Laplacien $1D$ peut se faire par Jacobi et Gauss-Seidel.*

Remarque 50 (Ciarlet). *Comparaison des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.*

Comparaison des méthodes de Jacobi et de relaxation.

Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tridiagonale par blocs, les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation pour $0 < w < 2$ convergent. Et il existe un et un seul paramètre de relaxation optimal.

2.2 Méthodes de gradient : minimisation de fonctionnelles quadratiques

Remarque 51. *Cadre : On cherche à approcher le minimum local ou global d'une fonction globale, par une méthode de descente.*

Résoudre un système linéaire dont la matrice est symétrique définie positive est équivalent à minimiser une fonction quadratique.

Proposition 52 (Allaire K p178)**.** *Soient* $A \in S_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. *On définit la fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *par* $f(x) = 1/2 < Ax, x > + < b, x >$. *Alors :*

-Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, f *admet un unique minimum en* x_0 *qui est la solution de* $Ax = b$.

— Si $A \in S_n^{+}(\mathbb{R})$ *et* $b \in Im(A)$, *les points où* f *atteint son minimum sont exactement les solutions de* $Ax = b$.

— Sinon, f *n'est pas minorée.*

Proposition 53 (Allaire K p179)**.** *On suppose* $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. *Alors* x_0 *réalise le minimum de* f *si et seulement si* $gradf(x_0) = 0$. *De plus, si* $x \in R^n$ *tel que* $gradf(x) \neq 0$, *alors pour tout* $\alpha \in]0, 2/\rho(A)[$, $f(x - \alpha gradf(x)) < f(x)$.

Corollaire 54 (Allaire K p179)**.** *Ainsi, pour* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *la suite définie par* $x_{k+1} = x_k - \alpha gradf(x_k) = x_k + \alpha(b - Ax_k)$ *converge vers la solution de* $Ax = b$.

Remarque 55. *Cette suite est celle de la décomposition régulière* $M = 1/\alpha I_n$, $N = 1/\alpha I_n - A$.

Proposition 56 (Hirriart, Urruty ?)**.** *[Allaire K sans vitesse de convergence] Pas optimal. La suite définie par* $x_{k+1} = x_k + \alpha_k(b - Ax_k)$, *où* α_k *minimise la fonction* $g_k(\alpha) = f(x_k - \alpha gradf(x_k))$, *converge vers la solution de* $Ax = b$. *+ vitesse de convergence.*

3 Recherche d'éléments propres

Remarque 57 (Filbet p61)**.** *L'étude de la résistance aux vibrations d'un système mécanique, ou de la stabilité d'équilibres d'une EDO, nécessitent un calcul de valeurs propres.*

Remarque 58 (Allaire K p215)**.** *On ne peut pas calculer par opérations élémentaires les racines d'un polynôme de degré supérieur ou égal à* 5. *Donc il n'existe pas de méthodes directes pour le calcul des valeurs propres. Il n'existe donc que des méthodes itératives pour les calculer. C'est une tâche beaucoup plus difficile que de résoudre un système linéaire.*

3.1 Méthode de la puissance

Proposition 59 (Allaire K p216)**.** *[Romb analyse matricielle p238] Algorithme de la méthode la puissance.*

Proposition 60. *Théorème de convergence (avec la vitesse de convergence). (Attention, il y a des conditions différentes sur la matrice selon les livres.)*

Proposition 61. *Méthode de la puissance inverse : déterminer la plus petite valeur propre en appliquant cette méthode à* A^{-1}.

Proposition 62. *Théorème de convergence de la puissance inverse (avec les vitesses de convergence).*

Remarque 63 (Allaire K p219)**.** *Pour accélérer la convergence, on remplace* A *par une matrice translatée* $A - \mu Id$ *avec* μ *une approximation de la plus petite valeur propre.*

3.2 Autres méthodes

Remarque 64. *Décomposition QR.*

Remarque 65. *Méthode de Givens-Householder, de Jacobi.*